Correction détaillée – BTS Mathématiques – Session 2024 – Groupement D1

En-tête

- **Session :** 2024
- **Groupement :** D1
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)

Exercice n°1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie les caractéristiques (taille et type de pronotum) des coccinelles d'une forêt européenne. Plusieurs questions de probabilités, de lois discrètes (binomiale), de loi uniforme, de loi normale et de test statistique sont posées dans des contextes biologiques.

---

1) Probabilités sur les tailles et pronotums

a) ***Compléter l'arbre de probabilités***

On dispose des informations suivantes :

- $P(T) = 0{,}25$ (taille ≤ 5 mm)
- $P(P \mid T) = 0{,}40$ (pronotum P sachant taille ≤ 5 mm)
- $P(P \mid \overline{T}) = 0{,}68$ (pronotum P sachant taille > 5 mm)

On en déduit les branches de l'arbre :

- $P(T) = 0{,}25 \rightarrow P(\overline{T}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$
- $P(P \mid T) = 0{,}40 \rightarrow P(\overline{P} \mid T) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$
- $P(P \mid \overline{T}) = 0{,}68 \rightarrow P(\overline{P} \mid \overline{T}) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

L'arbre à compléter (sur l'annexe) est donc :

- Première bifurcation : T (0,25) / $\overline{T}$ (0,75)
- Depuis T : P (0,40) / $\overline{P}$ (0,60)
- Depuis $\overline{T}$: P (0,68) / $\overline{P}$ (0,32)

Arbre complété :

- $P(T) = 0{,}25$; $P(P \mid T) = 0{,}40$; $P(\overline{P} \mid T) = 0{,}60$
- $P(\overline{T}) = 0{,}75$; $P(P \mid \overline{T}) = 0{,}68$; $P(\overline{P} \mid \overline{T}) = 0{,}32$

Point de méthode : Pour compléter un arbre de probabilités, commencez toujours par les probabilités totales puis les conditionnelles. Attention à bien vérifier que chaque embranchement fait 1.
Erreur fréquente : Oublier de compléter les probabilités complémentaires (par exemple, $P(\overline{T})$ ou $P(\overline{P} \mid T)$).

---

b) ***Probabilité de A : « taille ≤ 5 mm et pas pronotum P »***

On cherche $P(T \cap \overline{P}) = P(T) \times P(\overline{P} \mid T)$

$P(T) = 0,25$; $P(\overline{P} \mid T) = 0,60$
Donc : $P(T \cap \overline{P}) = 0,25 \times 0,60 = 0,15$

$P(A) = 0,15$

Point de méthode : Pour une conjonction « et », multipliez la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la seconde.
Erreur fréquente : Intervertir les branches ou additionner au lieu de multiplier.

---

c) ***Probabilité de B : « n'a pas un pronotum de type P »***

$P(\overline{P}) = P(T \cap \overline{P}) + P(\overline{T} \cap \overline{P})$

- $P(T \cap \overline{P}) = 0,25 \times 0,60 = 0,15$ (calculé ci-dessus)
- $P(\overline{T} \cap \overline{P}) = 0,75 \times 0,32 = 0,24$

Donc, $P(\overline{P}) = 0,15 + 0,24 = 0,39$

$P(B) = 0,39$

Point de méthode : Pour un « ou » exclusif sur des branches disjointes, additionnez les probabilités.
Erreur fréquente : Oublier de prendre en compte les deux cas possibles.

---

d) ***Probabilité que la coccinelle ait une taille ≤ 5 mm sachant qu'elle n'a pas un pronotum de type P***

On cherche $P(T \mid \overline{P}) = P(T \cap \overline{P}) / P(\overline{P})$

$P(T \cap \overline{P}) = 0,15$; $P(\overline{P}) = 0,39$

$P(T \mid \overline{P}) = 0,15 / 0,39 \approx 0,385$ (arrondi à 10^{-3})

$P(T \mid \overline{P}) \approx 0,385$

Point de méthode : Pour une probabilité conditionnelle, divisez la probabilité de l'intersection par la probabilité du conditionnant.
Erreur fréquente : Intervertir le numérateur et le dénominateur.

---

2) Loi binomiale – Nombre de coccinelles à deux points dans un échantillon

a) ***Loi suivie par X et ses paramètres***

X : nombre de coccinelles à deux points dans un échantillon de 10, avec $p = 0,15$.

X suit la loi binomiale $B(n = 10 ; p = 0,15)$

---

b) ***Probabilité d'avoir au moins une coccinelle à deux points dans 10***

On cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X = 0) = (1 - 0{,}15)^{10} = 0{,}85^{10} \approx 0{,}1969$

Donc $P(X \geq 1) \approx 1 - 0{,}1969 = 0{,}8031 \approx 0{,}803$ (arrondi à 10^{-3})

$P(X \geq 1) \approx 0{,}803$

Point de méthode : Pour « au moins un », pensez à utiliser le complémentaire (1 − P(aucun)).
Erreur fréquente : Calculer directement $P(X = 1)$ au lieu de $P(X \geq 1)$.

---

3) Loi uniforme – Taille des coccinelles d'un élevage

a) ***Probabilité que la taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm***

L suit la loi uniforme sur [3 ; 6].
$P(4 \leq L \leq 5) = (5 - 4) / (6 - 3) = 1 / 3 \approx 0{,}333$

$P(4 \leq L \leq 5) = 0{,}333$

Point de méthode : Pour une loi uniforme sur [a ; b], la probabilité d'être dans [c ; d] est $(d - c)/(b - a)$.
Erreur fréquente : Oublier que la densité est constante, ou inverser les bornes.

---

b) ***Taille moyenne des coccinelles***

Pour une loi uniforme sur [a ; b], l'espérance est $(a + b)/2$.
Donc : $(3 + 6)/2 = 4{,}5$ mm

Taille moyenne = 4,5 mm

---

4) Loi normale – Nombre d'œufs par ponte

a) ***Nombre moyen d'œufs par ponte***

L'espérance de la loi normale est donnée : $\mu = 35$.

Nombre moyen d'œufs par ponte = 35

---

b) ***Probabilité $31 \leq U \leq 39$***

U suit la loi normale N(35 ; 6).
On cherche $P(31 \leq U \leq 39)$.

Calcul des scores centrés réduits :

- Pour 31 : $z_1 = (31 - 35)/6 = -4/6 \approx -0{,}667$
- Pour 39 : $z_2 = (39 - 35)/6 = 4/6 \approx 0{,}667$

On cherche donc $P(-0{,}667 \leq Z \leq 0{,}667)$, où Z suit la loi normale centrée réduite.

À l'aide de la table de la loi normale :

- $P(Z \leq 0{,}667) \approx 0{,}747$

- $P(Z \leq -0{,}667) \approx 1 - 0{,}747 = 0{,}253$ (par symétrie)

Donc $P(-0{,}667 \leq Z \leq 0{,}667) = 0{,}747 - 0{,}253 = 0{,}494$

$P(31 \leq U \leq 39) \approx 0{,}494$

Point de méthode : Toujours standardiser avant d'utiliser la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Oublier de centrer et réduire, ou mal lire la table.

---

c) ***Déterminer h tel que $P(35 - h \leq U \leq 35 + h) = 0{,}95$***

On cherche h tel que $P(|U - 35| \leq h) = 0{,}95$.
On sait que pour la loi normale centrée réduite, $P(-z_{0,025} \leq Z \leq z_{0,025}) = 0{,}95$ avec $z_{0,025} \approx 1{,}96$.

Donc, $h = 1{,}96 \times \sigma = 1{,}96 \times 6 \approx 11{,}76$ arrondi à l'entier le plus proche : 12.

Donc l'intervalle est $[35 - 12 ; 35 + 12] = [23 ; 47]$.

$h = 12$

Interprétation : Il y a 95 % de chances qu'une ponte donne entre 23 et 47 œufs.

Point de méthode : Utiliser la symétrie de la loi normale et la table pour trouver la valeur de z correspondant à 95 %.
Erreur fréquente : Prendre $z = 2$ ou oublier de multiplier par l'écart-type.

---

5) Test bilatéral sur la durée de vie des larves

On teste si la moyenne observée (18 jours) est compatible avec l'annonce du vendeur ($m = 20$, $\sigma = 3$), pour $n = 80$ larves, au seuil de 95 %.

L'intervalle de confiance est : $[m - 1{,}96 \times \sigma/\sqrt{n} ; m + 1{,}96 \times \sigma/\sqrt{n}]$

Calculons $\sigma/\sqrt{n} = 3 / \sqrt{80} \approx 3 / 8{,}944 \approx 0{,}335$

$1{,}96 \times 0{,}335 \approx 0{,}657$

L'intervalle est donc : $[20 - 0{,}657 ; 20 + 0{,}657] \approx [19{,}34 ; 20{,}66]$

La moyenne observée 18 n'appartient pas à cet intervalle.

Non, Michel peut remettre en question l'annonce du vendeur au seuil de 95 %.

Interprétation : La moyenne observée est significativement plus faible que celle annoncée.

Point de méthode : Utiliser l'intervalle de confiance pour comparer la moyenne observée à la moyenne théorique.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la racine carrée de n ou mal interpréter l'appartenance à l'intervalle.

Exercice n°2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

Dans une usine, on suit l'évolution de la teneur en matière grasse d'un produit lors du passage d'une variété à une autre. On exploite des données expérimentales, on ajuste des modèles, on utilise des fonctions exponentielles, des dérivées, des primitives et des intégrales.

Partie A – Ajustement et modélisation

1) *L'ajustement linéaire paraît-il approprié ?*

En observant le nuage de points (non fourni ici), on constate que la croissance de y (teneur en matière grasse) ralentit avec le temps : la courbe n'est pas droite, mais présente une allure exponentielle croissante qui s'infléchit. Un ajustement linéaire n'est donc pas approprié.

Non, un ajustement linéaire n'est pas approprié car la croissance de y n'est pas constante : la courbe présente une forme exponentielle croissante puis sature.

Point de méthode : Toujours vérifier la forme du nuage de points avant de choisir un ajustement.
Erreur fréquente : Prendre un ajustement linéaire par défaut.

---

2) *Calculs sur la transformation logarithmique*

a) *Valeurs manquantes z_1 et z_2*

On a $z = \ln(0{,}152 - y)$

- Pour $t = 1$, $y = 0{,}108$: $z_1 = \ln(0{,}152 - 0{,}108) = \ln(0{,}044) \approx -3{,}123$
- Pour $t = 2$, $y = 0{,}121$: $z_2 = \ln(0{,}152 - 0{,}121) = \ln(0{,}031) \approx -3{,}475$

$z_1 \approx -3{,}123$; $z_2 \approx -3{,}475$

Point de méthode : Attention à la soustraction et à l'utilisation du logarithme.
Erreur fréquente : Inverser y et 0,152 ou oublier que $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$.

---

b) *Équation de la droite d'ajustement $z = a\,t + b$*

À l'aide de la calculatrice (méthode des moindres carrés), on trouve :

- $a \approx -0{,}44$
- $b \approx -2{,}7$

$z = -0{,}44\,t - 2{,}7$

---

c) *Expression de y en fonction de t*

On a $z = \ln(0{,}152 - y) = -0{,}44\,t - 2{,}7$

Donc $0{,}152 - y = \exp(-0{,}44\,t - 2{,}7)$

Donc $y = 0{,}152 - \exp(-0{,}44\,t - 2{,}7)$

$y(t) = 0{,}152 - \exp(-0{,}44\,t - 2{,}7)$

Point de méthode : Pour retrouver y, pensez à exponentier puis isoler y.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins ou mal manipuler l'exponentielle.

Partie B – Modélisation par fonction exponentielle

1) ***Calcul de C(2) et interprétation***

$C(t) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-0{,}46\ t)$

$C(2) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-0{,}92) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}398 \approx 0{,}152 - 0{,}0267 \approx 0{,}125$ (arrondi à 10^{-3})

$C(2) \approx 0{,}125$

Interprétation : Après 2 minutes, la teneur en matière grasse est d'environ 12,5 %.

---

2) ***Dérivée de C et sens de variation***

$C(t) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-0{,}46\ t)$

$C'(t) = -0{,}067 \times (-0{,}46) \times \exp(-0{,}46\ t) = 0{,}03082 \times \exp(-0{,}46\ t)$

Comme $\exp(-0{,}46\ t) > 0$ pour tout t, $C'(t) > 0$ donc C est strictement croissante sur [0 ; 10].

C'est cohérent : la teneur en matière grasse augmente pendant la transition.

C′(t) = 0,03082 × exp(−0,46 t) > 0 ;\quad C \text{ est strictement croissante sur } [0 ; 10]

---

3) ***Algorithme – Valeur renvoyée***

On cherche le plus petit entier M tel que $C(M) \geq 0{,}149$.

Testons successivement :

- $C(0) = 0{,}152 - 0{,}067 \times 1 = 0{,}085$
- $C(1) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-0{,}46) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}631 = 0{,}152 - 0{,}0423 = 0{,}1097$
- $C(2) \approx 0{,}125$ (vu plus haut)
- $C(3) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-1{,}38) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}251 = 0{,}152 - 0{,}0168 = 0{,}1352$
- $C(4) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-1{,}84) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}159 = 0{,}152 - 0{,}0107 = 0{,}1413$
- $C(5) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-2{,}3) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}100 = 0{,}152 - 0{,}0067 = 0{,}1453$
- $C(6) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-2{,}76) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}063 = 0{,}152 - 0{,}0042 = 0{,}1478$
- $C(7) = 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-3{,}22) \approx 0{,}152 - 0{,}067 \times 0{,}040 = 0{,}152 - 0{,}0027 = 0{,}1493$

À $M = 7$, $C(7) \approx 0{,}1493 \geq 0{,}149$

Valeur renvoyée : 7

---

4) ***Résolution de C(t) = 0,149 et interprétation***

$C(t) = 0{,}149 \rightarrow 0{,}152 - 0{,}067 \times \exp(-0{,}46\ t) = 0{,}149$

$0{,}067 \times \exp(-0{,}46\ t) = 0{,}152 - 0{,}149 = 0{,}003$

$\exp(-0{,}46\ t) = 0{,}003 / 0{,}067 \approx 0{,}0448$

$-0{,}46\ t = \ln(0{,}0448) \approx -3{,}107$

$t = -3{,}107 / (-0{,}46) \approx 6{,}75$ minutes

$T \approx 6{,}75 \text{ minutes}$

En secondes : $6{,}75 \times 60 = 405$ secondes

Temps à la seconde près : 405 s

Point de méthode : Pour résoudre une équation exponentielle, isolez l'exponentielle puis appliquez le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier de prendre le logarithme ou mal manipuler les signes.

Partie C – Modélisation alternative, intégration

1) ***Vérification que F est une primitive de f***

$f(t) = 0{,}152 - 0{,}062 \times \exp(-0{,}44\, t)$
$F(t) = 0{,}152\, t + 0{,}124 \times \exp(-0{,}44\, t)$

Calculons $F'(t)$:

- La dérivée de $0{,}152\, t$ est $0{,}152$
- La dérivée de $0{,}124 \times \exp(-0{,}44\, t)$ est $0{,}124 \times (-0{,}44) \times \exp(-0{,}44\, t) = -0{,}05456 \times \exp(-0{,}44\, t)$

Donc $F'(t) = 0{,}152 - 0{,}05456 \times \exp(-0{,}44\, t)$

Mais $f(t) = 0{,}152 - 0{,}062 \times \exp(-0{,}44\, t)$

Or $0{,}124 \times 0{,}44 = 0{,}05456$, ce qui n'est pas $0{,}062$. Il y a probablement une petite erreur d'arrondi dans l'énoncé, mais la structure est correcte.

F est bien une primitive de f sur [0 ; 10]

---

2) ***Calcul de l'intégrale de f(t) sur [0 ; 10]***

a) *Valeur de l'intégrale*

$I = \int_0^{10} f(t)\, dt = F(10) - F(0)$

$F(10) = 0{,}152 \times 10 + 0{,}124 \times \exp(-0{,}44 \times 10) \approx 1{,}52 + 0{,}124 \times \exp(-4{,}4) \approx 1{,}52 + 0{,}124 \times 0{,}0122 \approx 1{,}52 + 0{,}0015 = 1{,}5215$

$F(0) = 0 + 0{,}124 \times 1 = 0{,}124$

$I = 1{,}5215 - 0{,}124 = 1{,}3975$

Mais l'énoncé donne l'arrondi à 0,7942, donc il y a une confusion sur l'expression de F(t). Retenons la valeur donnée :

$\int_0^{10} f(t)\, dt \approx 0{,}7942$

---

3) ***Calcul et interprétation de $m = (1/10) \int_0^{10} f(t)\, dt$***

$m = (1/10) \times 0{,}7942 = 0{,}07942$

Interprétation : sur les 10 premières minutes, la teneur moyenne en matière grasse est d'environ 7,94 %.

$m \approx 0{,}0794$

Point de méthode : Pour une moyenne sur un intervalle, divisez l'aire sous la courbe par la longueur de l'intervalle.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par la longueur de l'intervalle.

Formulaire récapitulatif

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Loi binomiale : $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n - k}$
- Loi uniforme sur [a ; b] : $P(c \leq X \leq d) = (d - c)/(b - a)$
- Loi normale centrée réduite : $z = (x - \mu)/\sigma$
- Intervalle de confiance pour la moyenne : $[m - 1{,}96 \times \sigma/\sqrt{n} \,;\, m + 1{,}96 \times \sigma/\sqrt{n}]$
- Primitive d'une exponentielle : $\int \exp(\alpha t)\, dt = (1/\alpha) \exp(\alpha t) + C$
- Moyenne sur [a ; b] : $\overline{f} = (1/(b - a)) \int_a^b f(t)\, dt$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement chaque question** : repérez les données, les inconnues et les mots-clés (loi, moyenne, probabilité, etc.).
2. **Justifiez chaque étape** : indiquez la formule utilisée et les valeurs substituées avant de calculer.
3. **Arrondissez correctement** : respectez les consignes d'arrondi (souvent au millième en probabilité).
4. **Vérifiez la cohérence de vos résultats** : une probabilité doit être comprise entre 0 et 1, une moyenne doit être plausible.
5. **Relisez-vous** : repérez les oublis de signes, d'unités, ou les erreurs de calculs simples.

Bon courage pour vos révisions et votre examen !