Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS PODO • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS Podo

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et statistique (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2018/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce de gare

L'exercice étudie le démarrage d'un wagon propulsé par électromagnétisme, modélisé par une équation différentielle puis par une fonction donnant la distance parcourue. Il mobilise l'étude des variations et de la vitesse pour vérifier l'objectif des ingénieurs, puis le calcul intégral pour déterminer l'aire d'une pièce de gare représentée dans un repère.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

On réécrit l'équation sous la forme $y' + ay = 0$, avec $a = -0{,}2$. D'après la formule fournie, toute solution est de la forme $y(t)=ke^{-at}$. En remplaçant a par sa valeur, on obtient la famille des solutions sur l'intervalle demandé. La constante k peut être n'importe quel réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sur $[0, +\infty[$ sont $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La dérivée de la fonction proposée est $g'(t)=-15$. On remplace ensuite g et g' dans le membre de gauche : $g'(t) -0{,}2g(t)=-15-0{,}2(-15t-75)$. En développant, on obtient $-15+3t+15=3t$, ce qui est exactement le membre de droite de l'équation. L'égalité est vérifiée pour tout t de [0,3].

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction proposée est bien une solution : $g\prime(t) - 0,2g(t) = 3t$ sur $[0, 3]$.

Question 3°. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Une solution particulière de l'équation complète est $g(t)=-15t-75$. À cette solution, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée, trouvées à la question précédente : $ke^{0,2t}$. Cette somme donne toutes les solutions de l'équation différentielle, car la différence entre deux solutions de l'équation complète vérifie l'équation homogène. Aucune condition initiale n'est imposée ici.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les solutions sont $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, où $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle, qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale est $f(t)=ke^{0,2t}-15t-75$. La condition initiale donne $f(0)=k-75=0$, donc $k=75$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction cherchée. Elle vérifie bien $f(0)=0$ et reste solution de l'équation différentielle, puisque c'est un cas particulier de la solution générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant la condition initiale est $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression admise de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

L'expression donnée est $f'(t)=15e^{0,2t}-15$. Comme 15 est positif, résoudre $f'(t)\geq 0$ revient à résoudre $e^{0,2t}\geq 1$. La fonction exponentielle est croissante, donc cette inégalité équivaut à $0,2t\geq 0$, soit $t\geq 0$. Sur l'intervalle étudié [0,3], elle est vérifiée partout et l'égalité a lieu seulement en 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f\prime(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec égalité uniquement pour $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est nulle en $t=0$ et strictement positive sur]0,3]. La fonction f est donc croissante sur tout l'intervalle. Elle vaut $f(0)=0$ au départ et $f(3)=75(e^{0,6}-1)-45$ à l'arrivée. Le tableau indique son sens de variation et ses valeurs aux bornes.

t	0	3
f'(t)	0	+
f(t)	0	↗ 16,659

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction est croissante de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. En utilisant l'expression de la fonction, on calcule $f(1)=75(e^{0,2}-1)-15$. Cette valeur est environ 1,605 km. L'énoncé demande un arrondi au dixième : on conserve donc un chiffre après la virgule. Il s'agit de la distance parcourue depuis le départ, et non de la vitesse à cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, le wagon a parcouru environ $1,6$ km, arrondi au dixième.

Question 3° a). En utilisant f'(t) comme expression de la vitesse en kilomètres par minute, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t)=15e^{0,2t}-15$, en kilomètres par minute. À $t=2$, on obtient $f'(2)=15(e^{0,4}-1)$. Le calcul donne environ 7,377 km/min. En arrondissant au dixième comme demandé, la vitesse du wagon à deux minutes est 7,4 km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À deux minutes, la vitesse du wagon est d'environ $7,4$ km/min, arrondie au dixième.

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

L'objectif est d'atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. La vitesse calculée à deux minutes vaut $15(e^{0,4}-1)\approx 7,377$ km/min, soit environ 442,6 km/h. Elle dépasse donc 400 km/h. De plus, la vitesse augmente continûment sur [0,3], puisqu'elle est donnée par la fonction croissante f'. Le seuil a nécessairement été franchi avant deux minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : à deux minutes, la vitesse dépasse 400 km/h. Comme elle augmente continûment depuis le départ, le seuil a été atteint avant deux minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 s'écrit $y=f'(2)(t-2)+f(2)$. Ici, $f'(2)=15(e^{0,4}-1)$ et $f(2)=75(e^{0,4}-1)-30$. En développant puis en réduisant les termes constants, on obtient l'expression proposée en troisième position. Il suffit donc de sélectionner cette réponse au QCM.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir la valeur de l'aire A_1 du rectangle OPQR, en unités d'aire, parmi les trois propositions. Aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle OPQR a pour largeur *3* unités, de *x=0* à *x=3*. Sa hauteur est *2,25* unités, car son bord supérieur est la droite *y=2,25* et son bord inférieur est l'axe des abscisses. L'aire du rectangle est donc le produit de ces deux dimensions. L'unité graphique étant le mètre, l'aire est exprimée en mètres carrés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire : troisième proposition.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A_2 de la région limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

Sur [0,3], *g(x)* est positive, donc l'aire demandée est l'intégrale de *g*. Avec la primitive fournie, on évalue aux bornes :

1. $A_2=[(27/4)\ln(x^2+9)]_0^3$;
2. $A_2=(27/4)(\ln 18-\ln 9)=(27/4)\ln 2$.

La valeur approchée est 4,679 unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = (27/4)\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en unités d'aire, puis arrondir le résultat au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est celle du rectangle moins celle située sous la courbe : A_1-A_2. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale vaut deux fois cette différence. On utilise les valeurs exactes des questions précédentes : $A=2[6,75-(27/4)\ln 2]$. L'arrondi au millième donne l'aire demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire hachurée totale est $A = 2[6,75 - (27/4)\ln 2] \approx 4,143$ m².

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités et statistique

L'exercice porte sur l'obsolescence technique et logicielle des smartphones, puis sur la réparabilité des appareils d'un modèle donné. Il évalue le calcul de probabilités conditionnelles, l'utilisation d'une loi binomiale et la mise en œuvre d'un test bilatéral sur une proportion liée à l'opinion concernant une marque.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l'énoncé sur 200 smartphones, compléter le tableau croisé des effectifs selon que les appareils sont touchés ou non par l'obsolescence technique et logicielle, avec les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés par l'obsolescence technique, soit 6 appareils, et 8 % par l'obsolescence logicielle, soit 16. Parmi les 16 touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T, donc 2 appareils. Les autres effectifs se déduisent des totaux de lignes et de colonnes :

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184 et 200.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les probabilités simples sont données directement par les proportions de smartphones touchés. La probabilité conditionnelle demandée est également fournie dans l'énoncé : parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T. Ainsi, en écriture décimale, on obtient :

1. $P(T) = 0,03$;

2. $P(L) = 0,08$;
3. $P_L(T) = 0,125$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,03$; $P(L) = 0,08$; $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché par les deux formes d'obsolescence.

La probabilité d'être touché par les deux formes d'obsolescence se déduit de la probabilité conditionnelle donnée pour L. On multiplie la probabilité d'être touché par L par la probabilité d'être aussi touché par T sachant L :

$$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$$

Cela représente 1 % des smartphones étudiés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0,01$, soit 1 %.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'une des deux formes d'obsolescence.

Pour calculer la probabilité d'être touché par au moins une des deux formes d'obsolescence, on additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection, comptée deux fois :

Étape	Calcul
Somme des probabilités	$0,03 + 0,08$
Retrait de l'intersection	$0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$

La probabilité cherchée est donc de 10 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,10$, soit 10 %.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la probabilité d'être touché par L parmi les smartphones touchés par T. La formule d'une probabilité conditionnelle donne :

1. $P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)}$;

2. $P_T(L) = \dfrac{0,01}{0,03} = \dfrac{1}{3}$.

La valeur arrondie au millième est 0,333, soit environ 33,3 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \dfrac{1}{3} \approx 0,333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les 50 tirages sont indépendants et la probabilité d'obtenir un smartphone non réparable reste constante, égale à 4,5 %, soit 0,045. La variable X compte le nombre de succès « smartphone non réparable » au cours de ces 50 tirages. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

$X \sim \mathcal{B}(50; 0,045)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50; 0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones d'un lot soient tous réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque le lot ne contient aucun appareil non réparable, c'est-à-dire lorsque $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0,045 = 0,955$. Comme les 50 tirages sont indépendants, la probabilité que les 50 appareils soient réparables est :

$$P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100.$$

Le résultat est arrondi au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est environ $0,100$.

Question 3° a). Faire tourner l'algorithme à la main, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) pour i de 0 à 3 et les valeurs successives de S.

Pour chaque valeur de i, on calcule $P(X = i)$, puis on l'ajoute à la valeur précédente de S. Les probabilités binomiales et les sommes successives, arrondies au millième comme demandé, sont :

i	0	1	2	3
$P(X=i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de la loi binomiale complété

dessous.

i	0	1	2	3
$P(X=i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

L'algorithme additionne les probabilités correspondant à $i = 0, 1, 2, 3$. Il calcule donc $P(X \leq 3)$, la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. À partir des valeurs non arrondies, la somme vaut environ 0,813. En interprétation, sur un grand nombre de lots, environ 81,3 % contiendraient au plus trois appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S \approx 0,813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte des lots de smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est np. Avec 50 smartphones prélevés et une probabilité de non-réparabilité de 0,045, on obtient :

$$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25.$$

À long terme, un lot de 50 smartphones contient en moyenne 2,25 appareils non réparables. Cette moyenne n'est pas nécessairement un nombre entier pour un lot donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H_0 : p = 0,55, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95, parmi les propositions.

Sous H_0, la fréquence suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central de 95 % s'étend approximativement à 1,96 écarts types de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième. Parmi les trois propositions de l'énoncé, il faut choisir 0,07.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Pour un test bilatéral au seuil de 5 %, on rejette H_0 si la fréquence observée est en dehors de l'intervalle central contenant 95 % des fréquences sous H_0. Ici, la demi-largeur non arrondie est $1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Les bornes sont donc environ 0,477 et 0,623. Si la fréquence appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Rejeter H_0 si $F < 0,47748$ ou $F > 0,62252$; sinon, ne pas la rejeter.

Question 3°. À partir des réponses de 76 personnes parmi les 180 interrogées, conclure le test concernant la proportion de Français qui pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

La fréquence observée est $F = \dfrac{76}{180} \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse de l'intervalle de décision, environ 0,47748. Cette observation se situe donc dans la région de rejet au seuil de 5 %. On rejette l'hypothèse nulle selon laquelle la proportion de personnes concernées est égale à 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : la proportion de 55 % n'est pas confirmée par l'échantillon.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, groupement B, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Ses deux exercices étudient le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, calcul intégral, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - ay = 0, les solutions sont y(t) = k e^(at) ; une solution particulière permet de déterminer celles de l'équation complète.
- La dérivée f'(t) donne la vitesse en km/min ; pour l'exprimer en km/h, il faut la multiplier par 60.
- P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L), et P(T ∩ L) = P(L)P_L(T).
- Pour X de loi binomiale B(n, p), E(X) = np ; un test bilatéral compare la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités : le temps est en minutes, la distance en kilomètres et la vitesse visée est en km/h.
- Pour l'aire, exploiter la symétrie de la pièce et distinguer l'aire du rectangle de celle sous la courbe.
- Ne pas confondre P_L(T) et P_T(L) : l'événement conditionnant détermine le dénominateur.
- Dans le test, calculer la fréquence observée et la comparer aux bornes de l'intervalle, sans la confondre avec l'effectif.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la vitesse du wagon à partir de sa fonction de distance ?

La vitesse instantanée est donnée par f'(t), en kilomètres par minute puisque la distance est en kilomètres et le temps en minutes. Pour l'exprimer en kilomètres par heure, multipliez cette valeur par 60 avant de la comparer à 400 km/h.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir des données de l'exercice ?

La probabilité de T sachant L se calcule par P_L(T) = P(T ∩ L)/P(L), si P(L) est non nulle. L'événement placé en indice est celui dont la réalisation est connue et détermine le dénominateur.

Q : Comment interpréter la somme calculée par l'algorithme de la partie binomiale ?

À chaque boucle, l'algorithme ajoute P(X = i) à S. Après les valeurs i = 0, 1, 2 et 3, S représente la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

Q : Quelle règle appliquer pour conclure le test d'hypothèse de la marque B ?

Au seuil de 5 %, on compare la fréquence observée à l'intervalle centré sur 0,55, défini par h. Si elle appartient à l'intervalle, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on rejette H_0 au profit de l'alternative bilatérale.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2018/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Podo : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.