Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et conformité des rivets (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2022/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace initialement à 20 m/s et est ralenti par un système de freinage. L’exercice étudie sa vitesse au moyen d’une équation différentielle, d’une fonction exponentielle, d’un calcul intégral et d’un développement limité.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule des solutions de $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution.

Question 1.c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l’équation avec second membre sont la somme d’une solution particulière, ici $g(t) = 5$, et des solutions de l’équation homogène associée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On part de $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5.$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et la limite de $f(t)$ vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f décroît strictement de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais dans le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression étant égale à $f(t)$, F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$.

Question 4.b. **À l'aide de l'intégrale de f entre t0 = 0 et t1 = 1, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \text{m}$, au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier, sans justification, l'expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte.**

Le développement limité affiché donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, la troisième ajoute le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$, ce qui correspond à un développement limité à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \to 0.$

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et conformité des rivets

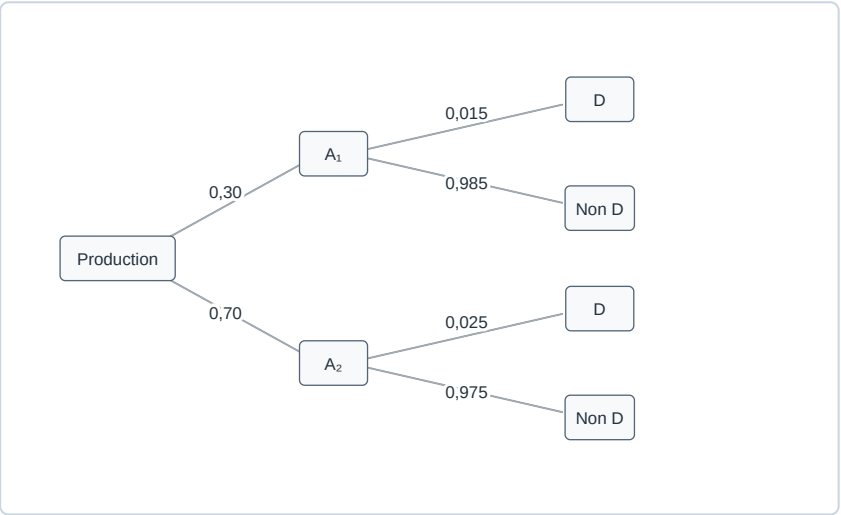
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des taux de défaut différents, et leur durée de fonctionnement est modélisée par une loi exponentielle. L'exercice étudie aussi la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, à partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de défaut.

L'arbre commence par le choix de l'atelier. Depuis chaque atelier, les deux branches suivantes correspondent à la présence ou à l'absence d'un défaut. Les probabilités des branches secondaires sont conditionnelles à l'atelier.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités des issues défaut et absence de défaut sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30, puis défaut 0,015 ou absence de défaut 0,985. Atelier 2 : 0,70, puis défaut 0,025 ou absence de défaut 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A1 ∩ D), où A1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité de suivre le chemin « atelier 1 puis défaut » est le produit de la probabilité d'être issu de l'atelier 1 par le taux de défaut de cet atelier :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Les deux chemins menant à un tube défectueux sont incompatibles. On additionne donc leurs probabilités :

$$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité conditionnelle de provenir de l'atelier 2 sachant que le tube n'a pas de défaut.

1. $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$.
2. $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$.
3. $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Déterminer l'espérance de la durée de fonctionnement T, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001, puis interpréter le résultat dans le contexte.**

Le sujet donne $\lambda = 0,001$ et la formule $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette espérance correspond à la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité qu'un tube fluorescent fonctionne moins de 8 000 heures.**

Avec $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $\lambda = 0,001$, on obtient :

$$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997.$$

La loi exponentielle étant continue, utiliser $<$ ou $\leq$ ne change pas cette probabilité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité qu'un tube fluorescent fonctionne plus de 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité de fonctionner au plus t. Donc $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures :

```
P(T > 10 000) = exp(-0,001 × 10 000) = exp(-10) ≈ 0,0000454
```

On arrondit ensuite au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Pour l'échantillon de 1 000 rivets dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée des rivets conformes dans l'échantillon. On en compte 975 parmi 1 000 :

$\hat{p} = f = \dfrac{975}{1000} = 0,975.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer, à l'aide de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion de rivets conformes au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^-3 près.

On applique la formule fournie avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$.

Calcul	Valeur
$f - 0,009677$	$0,965323$
$f + 0,009677$	$0,984677$

Les bornes sont arrondies au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures, coefficient 2 sauf pour la spécialité Traitement des matériaux, coefficient 3. Le sujet comporte deux exercices de 10 points : le freinage d'un chariot, puis la production de tubes fluorescents et la conformité de rivets. Il évalue équations différentielles, analyse, intégration et probabilités.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = b, avec a non nul et b constant, sont y(t) = Ce^(-at) + b/a.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale y = 5.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est [f - 1,96√(f(1-f)/n) ; f + 1,96√(f(1-f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, vérifier la solution particulière puis ajouter les solutions de l'équation homogène.
- Pour la distance, intégrer la vitesse sur l'intervalle demandé et respecter l'arrondi au centimètre.
- Dans l'arbre, distinguer la proportion produite par chaque atelier du taux de défaut conditionnel à cet atelier.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et l'effectif indiqués, puis arrondir chaque borne au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle dans l'exercice des ateliers ?

Pour calculer P(A sachant B), diviser P(A ∩ B) par P(B). Dans l'arbre, la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant ses probabilités de branche, puis on additionne les chemins correspondant à l'événement demandé.

Q : Quelle formule utiliser pour les probabilités de durée de vie ?

Pour une durée T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). La probabilité de dépasser t est P(T > t) = e^(-λt), et l'espérance vaut 1/λ.

Q : Comment gérer le temps et les arrondis dans cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Traitez les questions indépendantes avec des calculs lisibles et gardez du temps pour vérifier les unités et les arrondis demandés : centième, centimètre ou millième.

Q : Qu'attend le jury pour l'intervalle de confiance des rivets ?

Utilisez la fréquence observée, soit 975/1 000, et l'effectif n = 1 000 dans la formule à 95 % fournie. Présentez l'intervalle avec ses deux bornes et arrondissez chacune à 10^-3 près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2022/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Podo : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.