Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Podo

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformées de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2022/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée à l'aide d'une équation différentielle, de ses variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule donnée s'applique à l'équation homogène `y' + ay = 0`, avec `a = 0,8`. Elle donne toutes les solutions sur l'intervalle `[0 ; +∞[` : l'exponentielle est multipliée par une constante réelle arbitraire `k`.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction `g` est constante, donc `g'(t) = 0`. En substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient `g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 × 5 = 4`. Cette égalité étant vraie pour tout `t`, `g` est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **Oui, g(t) = 5 est une solution.**

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante `g(t) = 5` est une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit `k e^{-0,8t}`. Le réel `k` peut prendre n'importe quelle valeur.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition `f(0) = 20` donne `k e^0 + 5 = 20`. Comme `e^0 = 1`, on trouve `k = 20 − 5 = 15`. En remplaçant `k` dans l'expression générale, on obtient la solution demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression donnée `f(t) = 15e^{-0,8t} + 5`. Quand `t` tend vers +∞, l'exposant `−0,8t` tend vers −∞, donc `e^{-0,8t}` tend vers zéro. Le terme `15e^{-0,8t}` tend ainsi vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe représentative C de f admet une asymptote, et en donner une équation.

La fonction `f` tend vers le nombre fini 5 lorsque `t` tend vers +∞. Par définition, la courbe représentative de `f` admet donc une asymptote horizontale en +∞. Son équation est celle de la droite dont l'ordonnée est constamment égale à cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout `t ≥ 0`, l'exponentielle `e^{-0,8t}` est strictement positive. Ainsi, `f'(t) = −12e^{-0,8t} < 0` sur l'intervalle : `f` est strictement décroissante. De plus, `f(0) = 15 + 5 = 20` et sa limite en +∞ vaut 5.

t	0	+∞
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or, pour tout instant fini `t ≥ 0`, l'exponentielle est positive et `f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5`. La vitesse reste donc positive et se rapproche de 5 m/s sans atteindre cette valeur à un instant fini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Non, le chariot ne s'arrête pas** : sa vitesse tend vers 5 m/s.

Question 4. a. **Vérifier que F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de `F(t) = −18,75e^{-0,8t} + 5t`. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, `F'(t) = (−18,75)(−0,8)e^{-0,8t} + 5`. Le produit des coefficients vaut 15, donc `F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)`. Ainsi, `F` est bien une primitive de `f`.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$**, donc F est une primitive de f.**

Question 4. b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de sa vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue entre 0 et 1 est l'intégrale de la vitesse. Avec la primitive donnée, `d = F(1) − F(0) = (−18,75e^{-0,8} + 5) − (−18,75)`, soit `23,75 − 18,75e^{-0,8}`. La valeur exacte est en mètres ; l'arrondi au centimètre s'obtient en donnant deux décimales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit **15,33 m** au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel fournit la partie polynomiale `20 − 12t + (24/5)t²`. Dans un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme `t²ε(t)`, avec `ε(t) → 0` lorsque `t → 0`. Parmi les choix proposés, seule la troisième proposition présente ce reste et le bon coefficient quadratique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Troisième proposition :** $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est `y = f(0) + f'(0)(t − 0)`. On a `f(0) = 20` et, d'après l'expression de la dérivée, `f'(0) = −12e^0 = −12`. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\boxed{y = 20 - 12t}$$

2. Étude d’un système électrique par transformées de Laplace

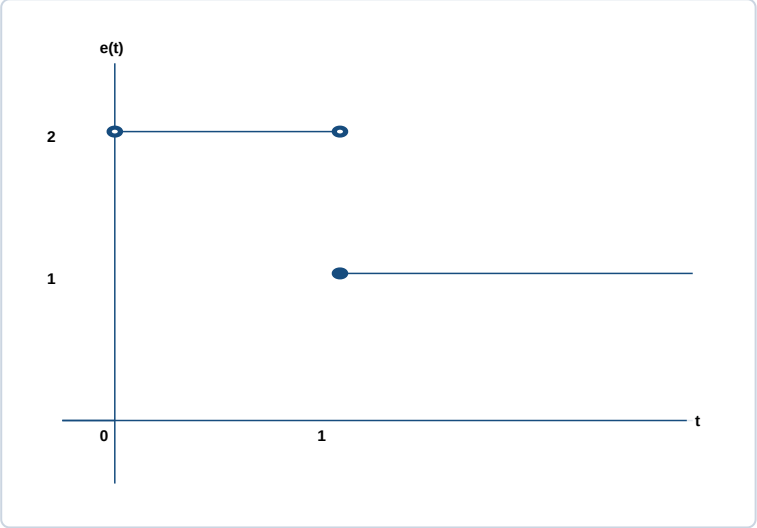
Un système électrique reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et produit un signal de sortie s(t). La fonction de transfert et le formulaire de Laplace permettent de déterminer les transformées, l’expression temporelle de la sortie et les courbes des signaux.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est nul avant l’origine. À partir de t = 0, il vaut 2 jusqu’à t = 1, puis vaut 1. Les cercles pleins indiquent les valeurs prises aux instants de saut ; les cercles vides indiquent les extrémités exclues des paliers.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe est nulle pour t < 0, égale à 2 pour 0 ≤ t < 1, puis égale à 1 pour t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal e(t).

Par linéarité, la transformée de U(t) est 1/p. La propriété de retard d’une unité donne pour U(t − 1) la transformée e^{-p}/p. On applique ces deux résultats à e(t) = 2U(t) − U(t − 1).

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. À partir de S(p) = H(p) × E(p), démontrer l'expression S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e^(−p) donnée dans le sujet.

La fonction de transfert donnée est $H(p) = \frac{1}{p+1}$. Avec $E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}$, la relation entrée-sortie donne :

$S(p) = H(p)E(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On obtient $S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

En mettant les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, le numérateur devient $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, égalité vérifiée.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(−p)/p et e^(−p)/(p + 1).

On utilise les transformées usuelles du formulaire. Pour les deux dernières, la multiplication par e^{-p} correspond à un retard d'une unité : chaque fonction est décalée et multipliée par l'échelon retardé.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé, les inverses sont $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées sont nulles. Il reste donc l'inverse de la première différence, multipliée par 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. En utilisant l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

À t = 1, on utilise l'expression valable pour $t \geq 1$:

$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}264.$

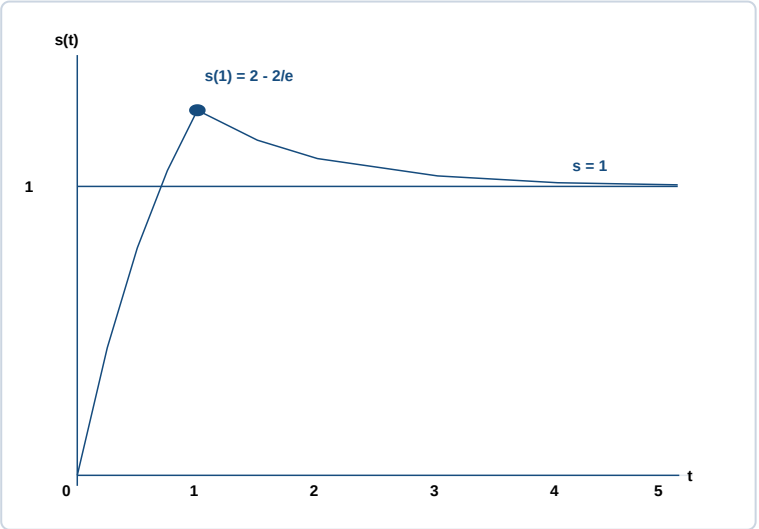
Arrondie au dixième, cette valeur est 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur exacte est $s(1) = 2 - \frac{2}{e}$, soit environ 1,3 au dixième.

Question 5. b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ est croissante. Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$ est décroissante, car $e - 2 > 0$. Les deux expressions coïncident en t = 1 : la courbe atteint alors son maximum $2 - 2/e$, puis tend vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, atteint son maximum $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5. c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro ; il ne reste que la constante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite du signal de sortie lorsque t tend vers $+\infty$ est 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, d'une durée de deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de dix points portent sur le freinage d'un chariot et l'étude d'un système électrique, mobilisant équations différentielles, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(−at).
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle.
- Un retard causal de a unités dans le temps introduit le facteur e^(−ap) dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
- Justifier l'asymptote par la limite et les variations par le signe de la dérivée.
- Calculer la distance en évaluant une primitive aux deux bornes, puis respecter l'arrondi au centimètre.
- Avec les fonctions échelon, distinguer les intervalles avant et après t = 1 et respecter la causalité.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la distance parcourue à partir de la vitesse du chariot ?

On intègre la fonction vitesse sur l'intervalle étudié. Si F est une primitive de f, la distance entre t_0 et t_1 vaut $F(t_1) - F(t_0)$. On donne ensuite la valeur exacte et l'arrondi demandé, avec l'unité.

Q : Comment traiter le retard introduit par U(t − 1) avec Laplace ?

La fonction échelon retardée U(t − 1) a pour transformée e^(−p)/p. Plus généralement, un signal causal retardé de a unités introduit le facteur e^(−ap), conformément à la propriété de translation du formulaire.

Q : Comment organiser son temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun dix points et les trois parties du premier exercice sont indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les tracés et le document-réponse.

Q : Que faut-il soigner dans les réponses graphiques et les arrondis ?

Respectez les axes et les valeurs caractéristiques lors des tracés, en distinguant les intervalles de définition des signaux. Pour les calculs numériques, indiquez la valeur exacte, puis l'approximation demandée et son unité.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btspodo.fr/assets/annales/bts-podo/E2 - Mathématiques/2022/BTS Podo - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Podo : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.